

第2讲 含参不等式（组）（二）

一、分类讨论解不等式

1. 含参系数的讨论

例题

解关于 x 的不等式： $(5m - 2)x \leq 2m$.

解：①当 $5m - 2 > 0$ 时，即 $m > \frac{2}{5}$ 时，

$$x \leq \frac{2m}{5m-2};$$

②当 $5m - 2 = 0$ 时，即 $m = \frac{2}{5}$ 时，

$$0 \cdot x \leq \frac{4}{5}, x \text{ 为任意实数};$$

③当 $5m - 2 < 0$ 时，即 $m < \frac{2}{5}$ 时，

$$x \geq \frac{2m}{5m-2}.$$

【教法备注】

1、解不等式的步骤：

①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化1

2、解含参不等式，计算过程的前四步，与常规不等式完全相同，需要注意的是最后一步。

① x 前的系数是正还是负，要分类讨论，注意变号；

② 如果 x 前的系数为0，此时方程有解、无解要再一步讨论。

这部分内容不能靠死记硬背，学员应记住的是一个不等式该如何求解。在求解的过程中，每一步需要注意哪些“坑”，最后逐步的进行讨论。

方程 $ax = b$ 与不等式 $ax > b$ 及 $ax < b$ 解法比较：

$ax = b$	当 $a \neq 0$ 时, $x = \frac{b}{a}$; 当 $a = 0, b = 0$ 时, x 为任意实数; 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 方程无解.
$ax > b$	当 $a > 0$ 时, $x > \frac{b}{a}$; 当 $a < 0$ 时, $x < \frac{b}{a}$; 当 $a = 0, b < 0$ 时, x 为任意实数; 当 $a = 0, b \geq 0$ 时, 方程无解.
$ax < b$	当 $a > 0$ 时, $x < \frac{b}{a}$; 当 $a < 0$ 时, $x > \frac{b}{a}$; 当 $a = 0, b > 0$ 时, x 为任意实数; 当 $a = 0, b \leq 0$ 时, 方程无解.

练习

- ①若 $a = 0, b \neq 0$, 方程 $ax = b$ 无解;
 ②若 $a = 0, b \neq 0$, 不等式 $ax > b$ 无解;
 ③若 $a \neq 0$, 则方程 $ax = b$ 有唯一解 $x = \frac{b}{a}$;
 ④若 $a \neq 0$, 则不等式 $ax > b$ 的解为 $x > \frac{b}{a}$. 则 ().
 A. ①、②、③、④都正确
 B. ①、③正确, ②、④不正确
 C. ①、③不正确, ②、④正确
 D. ①、②、③、④都不正确

【答案】 B

【解析】 $a = 0, b = -1, 0x > -1$, 可见②无解不真.

若 $a \neq 0$, 比如 $a = -1, -x > b \Rightarrow x < -b$, ④不真.

只有①③正确.

【标注】 【知识点】 解的情况

- 解下列关于 x 的不等式:

(1) $kx + 1 > 3$.

(2) $mx + 3 < -6n - x$.

【答案】(1) 答案见解析.

(2) 答案见解析.

【解析】(1) $k > 0$ 时, $x > \frac{2}{k}$.

$k = 0$ 时, 无解.

$k < 0$ 时, $x < \frac{2}{k}$.

(2) $m + 1 > 0$ 即 $m > -1$ 时, $x < \frac{-3-6n}{m+1}$.

$m + 1 = 0$, $-3 - 6n > 0$ 即 $m = -1$, $n < -\frac{1}{2}$ 时, x 取任意值.

$m + 1 = 0$, $-3 - 6n \leq 0$ 即 $m = -1$, $n \geq -\frac{1}{2}$ 时, 无解.

$m + 1 < 0$ 即 $m < -1$ 时, $x > \frac{-3-6n}{m+1}$.

【标注】【知识点】分类讨论一元一次不等式解的情况

2. 含参解集的讨论

|| 例题

求关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a < 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} < x \end{cases}$ 的解集.

解: 解 $x - a < 0$ 得 $x < a$,

解 $\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} < x$ 得 $x > 1$.

① 当 $a \leq 1$ 时, 原不等式组 无解.

② 当 $a > 1$ 时, 原不等式组的解集为 $1 < x < a$.

【教法备注】

当不等式组的两个单独的解中含有不确定大小的字母时，需要讨论来确定最终解集．讨论的依据如下：

不等式组 ($a < b$)	图示	解集	口诀
$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$		$x \geq b$	同大取大
$\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$		$x \leq a$	同小取小
$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$a \leq x \leq b$	大小小大中间找
$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$		无解	大大小小找不到

练习

3. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+1 > 2 \\ ax+1 > 0 \end{cases}$ 中参数 $a > 0$ ，则不等式组的解集为 () .
- A. $x > 1$ B. $x > -\frac{1}{a}$ C. $x > 0$ D. x 无解

【答案】 A

【解析】 根据 $a > 0$ ，

$$\text{整理原不等式组得到 } \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{a} \end{cases},$$

$$\text{显然 } -\frac{1}{a} < 1,$$

则原方程组的解集取 $x > 1$ ，

故选 A .

【标注】 【知识点】分类讨论一元一次不等式组解的情况

4. 解下列关于 x 的不等式组：

$$(1) \begin{cases} 3x-1 > a \\ -x-2a < 2 \end{cases}.$$

$$(2) \begin{cases} 3mx-6 < 5-mx \\ mx+x > (1-2m)x+8 \end{cases}.$$

【答案】 (1) 答案见解析 .

(2) 答案见解析.

【解析】(1) 原不等式组可化为: $\begin{cases} x > \frac{a+1}{3} \\ x > -2a-2 \end{cases}$

①当 $\frac{a+1}{3} = -2a-2$ 时, 即 $a = -1$ 时, 原不等式组的解集为: $x > 0$;

②当 $\frac{a+1}{3} > -2a-2$ 时, 即 $a > -1$ 时, 原不等式组的解集为: $x > \frac{a+1}{3}$;

③当 $\frac{a+1}{3} < -2a-2$ 时, 即 $a < -1$ 时, 原不等式组的解集为: $x > -2a-2$.

(2) 原不等式组可化为: $\begin{cases} 4mx < 11 \\ 3mx > 8 \end{cases}$,

①当 $m > 0$ 时, 可得: $\begin{cases} x < \frac{11}{4m} \\ x > \frac{8}{3m} \end{cases}$,

$\therefore \frac{8}{3m} - \frac{11}{4m} = -\frac{1}{12m} < 0$, 故解集为 $\frac{8}{3m} < x < \frac{11}{4m}$;

②当 $m < 0$ 时, 可得: $\begin{cases} x > \frac{11}{4m} \\ x < \frac{8}{3m} \end{cases}$,

$\therefore \frac{8}{3m} - \frac{11}{4m} = -\frac{1}{12m} > 0$, 故解集为 $\frac{11}{4m} < x < \frac{8}{3m}$;

③当 $m = 0$, 原不等式组无解.

【标注】【知识点】分类讨论一元一次不等式组解的情况

5. 解关于 x 的不等式组: $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ 2x-3 < 1 \\ 3x+3 > 2+2x \end{cases}$.

【答案】答案见解析.

【解析】原不等式组可化为: $\begin{cases} x \geq a \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

①当 $a \leq -1$ 时, 原不等式的解集为: $-1 < x < 2$;

②当 $-1 < a < 2$ 时, 原不等式的解集为: $a \leq x < 2$;

③当 $a \geq 2$ 时, 原不等式无解.

【标注】【知识点】分类讨论一元一次不等式组解的情况

二、含参不等式组的字母取值范围

1. 已知解集求字母范围

|| 例题

若不等式组 $\begin{cases} x+a \geq 0 \\ 1-2x > x-2 \end{cases}$ 有解，则 a 的取值范围是 () .

A. $a > -1$ B. $a \geq -1$ C. $a \leq 1$ D. $a < 1$

解：由 $x+a \geq 0$ 得 $x \geq -a$,

由 $1-2x > x-2$ 得 $x < 1$.

$\because$ 不等式组有解，

$\therefore -a < 1$, 解得 $a > -1$.

【教法备注】

方法一：将解集标记在数轴上，通过不等式组的解集的判断方法看出字母范围 .

方法二：用不等式组解集的口诀解决，即“大大取大，小小取小，大小小大中间找，大大小小没有解” .

注意：要特别判断范围是否取等号 .

练习

6. 若不等式组 $\begin{cases} x-2a > 2 \\ 3x+2 > 4x-1 \end{cases}$ 的解集为 $-2 < x < 3$, 则 a 的取值范围是 () .

A. $a = \frac{1}{2}$

B. $a = -2$

C. $a \geq -2$

D. $a \leq -1$

【答案】 B

【解析】 $\because x-2a > 2$,

$\therefore x > 2a+2$,

$\because 3x+2 > 4x-1$,

$\therefore -x > -3$,

$\therefore x < 3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2 < x < 3$,

$\therefore 2a+2 < x < 3$ 且 $2a+2 = -2$,

$\therefore 2a = -4$,

$\therefore a = -2$.

【标注】 【知识点】 由不等式 (组) 的解集求参数的范围

7. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x+a < 1 \\ 5x-b > 2 \end{cases}$ 的解集是 $-1 < x < 1$, 则 $ab =$ _____ .

【答案】 7

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

练习

8. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x+9 > 6x+1 \\ x-k < 1 \end{cases}$ 的解集为 $x < 2$ ，则 k 的取值范围为（ ）.
- A. $k > 1$ B. $k < 1$ C. $k \geq 1$ D. $k \leq 1$

【答案】 C

【解析】 解不等式组 $\begin{cases} 2x+9 > 6x+1 \\ x-k < 1 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x < 2 \\ x < k+1 \end{cases}$.
 $\because$ 不等式组 $\begin{cases} 2x+9 > 6x+1 \\ x-k < 1 \end{cases}$ 的解集为 $x < 2$ ，
 $\therefore k+1 \geq 2$ ，
解得 $k \geq 1$.
故选C.

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

9. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{6} \geq 1 \\ 4(x-1) < 3(x-a) \end{cases}$ 无解，则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $a \geq 1$

【解析】 $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{6} \geq 1$ ，
 $4x+2-x+1 \geq 6$ ，
 $3x \geq 3$ ，
 $x \geq 1$ ，
 $4(x-1) < 3(x-a)$ ，
 $4x-4 < 3x-3a$ ，
 $x < 4-3a$ ，
 $\therefore 4-3a \leq 1$ ，
 $\therefore 3a \geq 3$ ，
 $a \geq 1$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

练习

10. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} m-1 \leq x \leq m+2 \\ 3 < x < 5 \end{cases}$ 的解集是 $3 < x \leq m+2$ ，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $1 < m < 3$

【解析】由题意得 $\begin{cases} 3 \geq m-1 \\ m+2 < 5 \end{cases}$,

即 $m < 3$,

$\therefore 3 < x \leq m+2$,

$\therefore m+2 > 3$,

$\therefore m > 1$,

$\therefore 1 < m < 3$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

11. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} ax > -1 \\ x+a > 0 \end{cases}$ 有解，求实数 a 的取值范围.

【答案】 $a > -1$

【解析】方法一：

$a > 0$, $\begin{cases} x > -\frac{1}{a} \\ x > -a \end{cases}$ 此时有解

$a < 0$, $\begin{cases} x < -\frac{1}{a} \\ x > -a \end{cases}$ 令 $-\frac{1}{a} > -a \therefore a > -1$

$a = 0$ 此时有解

综上 $a > -1$

方法二：

若 $a \geq 0$ ，显然不等式组有解；

若 $a < 0$ ，则 $\begin{cases} x < -\frac{1}{a} \\ x > -a \end{cases}$ 有解，

则 $-\frac{1}{a} > -a$ ， $-a^2 > -1$ ， $a^2 < 1$ ，

$\therefore -1 < a < 0$ ；

综上得， $a > -1$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

12. 若不等式组 $\begin{cases} 3(x-2) < 2x-5a \\ \frac{x-a}{3} \leq \frac{x}{2} \end{cases}$ 有解，且每一个解 x 均不在 $-2 \leq x \leq 3$ 范围内，求 a 的取值范围。

【答案】 a 的取值范围为 $\frac{8}{5} \leq a < 2$ 或 $a < -\frac{3}{2}$ 。

【解析】 由 $3(x-2) < 2x-5a$ 得： $3x-6 < 2x-5a$ ，

解得 $x < 6-5a$ ，

由 $\frac{x-a}{3} \leq \frac{x}{2}$ 得： $2x-2a \leq 3x$ ，

解得 $x \geq -2a$ 。

$\therefore$ 不等式组有解，

$\therefore -2a < 6-5a$ ，

$3a < 6$ ，

$a < 2$ ，

$\therefore$ 解集为 $-2a \leq x < 6-5a (a < 2)$ 。

又 $\therefore$ 每一个解均不在 $-2 \leq x \leq 3$ 范围内，

$\therefore 6-5a \leq -2$ 或 $-2a > 3$ ，

解得： $a \geq \frac{8}{5}$ 或 $a < -\frac{3}{2}$ ，

$\therefore a$ 的取值范围为 $\frac{8}{5} \leq a < 2$ 或 $a < -\frac{3}{2}$ 。

【标注】 【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

2. 整数解个数问题

关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 3 - 2x > -1 \end{cases}$ 的整数解共有5个，则 a 的取值范围是_____.

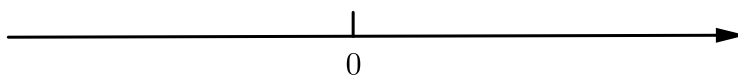
解：由不等式组可得 $\begin{cases} x \geq a \\ x < 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 不等式组有5个整数解，

$\therefore a \leq x < 2$,

$\therefore$ 其5个整数解分别为1、0、-1、-2、-3，

$\therefore -4 < a \leq -3$.

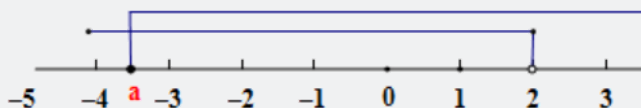


【教法备注】

关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 3 - 2x > -1 \end{cases}$ 的整数解共有5个，则 a 的取值范围是 $a \leq x < 2$ _____.

解：由不等式组可得 $\begin{cases} x \geq a \\ x < 2 \end{cases}$ ，不等式组有5个整数解，则 $a \leq x < 2$ ，

其5个整数解分别为1、0、-1、-2、-3，所以 $-4 < a \leq -3$ 。



根据给出的不等式整数解的个数，在数轴上选取适当的整数，利用数轴解决问题。

注意：要特别判断范围是否取等号。

13. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} 3 - 2x > 1 \\ x - a > 0 \end{cases}$ 恰有3个整数解，那么 a 的取值范围是（ ）。

A. $-2 < a < 1$

B. $-3 < a \leq -2$

C. $-3 \leq a < -2$

D. $-3 < a < -2$

【答案】C

【解析】 $\begin{cases} 3 - 2x > 1 \text{ ①} \\ x - a > 0 \text{ ②} \end{cases}$

解①得： $x < 1$ ，

解②得： $x > a$ ，

则不等式组的解集是： $a < x < 1$ ，

不等式组有3个整数解，则整数解是-2，-1，0，

则 $-3 \leq a < -2$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

14. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x+15}{2} > x-3 \\ \frac{2x+2}{3} < x+a \end{cases}$ 只有4个整数解，则 a 的取值范围是（ ）.
- A. $-5 \leq a \leq -\frac{14}{3}$ B. $-5 \leq a < -\frac{14}{3}$ C. $-5 < a \leq -\frac{14}{3}$ D. $-5 < a < -\frac{14}{3}$

【答案】C

【解析】 $\begin{cases} \frac{x+15}{2} > x-3 \text{ ①} \\ \frac{2x+2}{3} < x+a \text{ ②} \end{cases}$,

由①得： $x < 21$,

由②得： $x > 2-3a$,

$\therefore$ 不等式组只有4个整数解，

$\therefore$ 整数解为20, 19, 18, 17 ,

则 $16 \leq 2-3a < 17$,

$$\therefore -5 < a \leq -\frac{14}{3} .$$

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

15. 如果关于 x 的不等式 $\begin{cases} 2x-m \geq 0 \\ n-3x \geq 0 \end{cases}$ 仅有四个整数解： $-1, 0, 1, 2$, 那么适合这个不等式组的整数 m, n 组成的有序实数对 (m, n) 最多共有（ ）.
- A. 2个 B. 4个 C. 6个 D. 9个

【答案】C

【解析】 $\therefore$ 解不等式 $2x-m \geq 0$ 得： $x \geq \frac{m}{2}$,

解不等式 $n-3x \geq 0$, 得： $x \leq \frac{n}{3}$,

$\therefore$ 不等式组的解集是 $\frac{m}{2} \leq x \leq \frac{n}{3}$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式组的整数解仅有 $-1, 0, 1, 2$,

$$\therefore -2 < \frac{m}{2} \leq -1, 2 \leq \frac{n}{3} < 3 ,$$

解得： $-4 < m \leq -2, 6 \leq n < 9$,

即 m 的值是 $-3, -2$, n 的值是 $6, 7, 8$,

即适合这个不等式组的整数 m, n 组成的有序数对 (m, n) 共有6个, 是 $(-3, 6), (-3, 7), (-3, 8), (-2, 6), (-2, 7), (-2, 8)$.

故选C.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

16. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 3x+1 < 9 \\ 2x+a \geq 0 \end{cases}$ 整数解的和为0, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $4 \leq a < 6$

【解析】 解不等式 $3x+1 < 9$ 得, $x < \frac{8}{3}$,
解不等式 $2x+a \geq 0$ 得 $x \geq -\frac{a}{2}$,
故原不等式组的解集为 $-\frac{a}{2} \leq x < \frac{8}{3}$,
 $\therefore$ 此不等式组的整数解的和为0,
 $\therefore$ 此不等式组的所有整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$,
 $\therefore a$ 的取值范围为 $-3 < -\frac{a}{2} \leq -2$,
故答案为: $4 \leq a < 6$.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

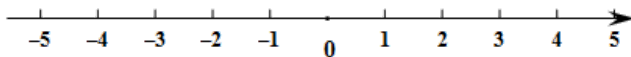
三、含绝对值的不等式

思考: 用绝对值的几何意义解下列问题

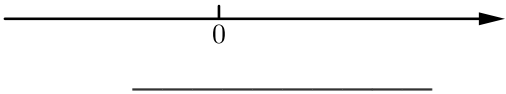
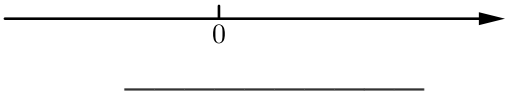
方程 $|x| = 2$ 的解是? _____

不等式 $|x| < 2$ 的解集是? _____

不等式 $|x| > 2$ 的解集是? _____

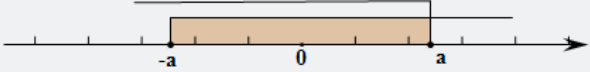
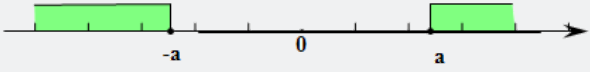


归纳:

$ x \leq a$	
$ x \geq a$	

【教法备注】

归纳：

$ x \leq a, -a \leq x \leq a (a > 0)$	
$ x \geq a, x \geq a \text{ 或 } x \leq -a (a > 0)$	

归纳二：
 $|ax + b| < c (c > 0) \Leftrightarrow -c < ax + b < c$
 $|ax + b| > c (c > 0) \Leftrightarrow ax + b > c \text{ 或 } ax + b < -c$

|| 例题

解不等式： $|x - 2| \leq 2x - 10$.

解：由 $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \leq 2x - 10 \end{cases}$, 得 $x \geq 8$,
 由 $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2 - x \leq 2x - 10 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 4 \end{cases}$, 矛盾 .
 故原不等式的解集为 $x \geq 8$.

|| 练习

17. 解下列不等式： $|3x + 1| \leq 2$.

【答案】 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

【解析】 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】 解含绝对值的一元一次不等式（组）

18. 解下列不等式： $|2x - 1| > 3x$ ；

【答案】 $x < \frac{1}{5}$

【解析】 当 $2x - 1 < 0$ ，即 $x < \frac{1}{2}$ 时， $1 - 2x > 3x$ ，解得 $x < \frac{1}{5}$ ， $\therefore$ 此时不等式的解集为 $x < \frac{1}{5}$ ；
当 $2x - 1 \geq 0$ ，即 $x \geq \frac{1}{2}$ 时， $2x - 1 > 3x$ ，解得 $x < -1$ ， $\therefore$ 此时不等式无解；
 $\therefore$ 综上所述，原不等式的解集为 $x < \frac{1}{5}$ 。

【标注】【知识点】解含绝对值的一元一次不等式（组）

19. 解绝对值不等式组： $3 < |2x - 1| < 5$ 。

【答案】 $-2 < x < -1$ 或 $2 < x < 3$ 。

【解析】 原式化简为 $-5 < 2x - 1 < -3$ 或者 $3 < 2x - 1 < 5$ ，解得不等式的解集为 $-2 < x < -1$ 或 $2 < x < 3$ 。

【标注】【知识点】解含绝对值的一元一次不等式（组）